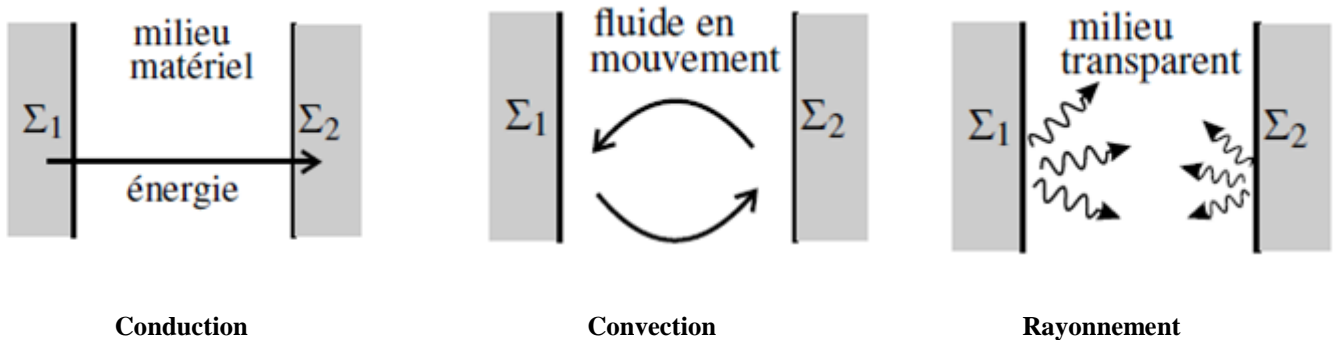


# CHAPITRE 2 : TRANSFERTS THERMIQUES

## 1- Les trois modes de transfert thermique

Un **transfert thermique** peut s'opérer entre deux systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  quand leurs températures sont différentes. Le système dont la température est la plus élevée cède de l'énergie au système dont la température est la plus basse. Ce transfert d'énergie se passe à l'échelle microscopique.

Il existe trois **modes de transfert thermique**



Les trois modes de transfert thermique entre un système  $\Sigma_1$  de température  $T_1$  et un système  $\Sigma_2$  de température  $T_2 < T_1$ .

### 1-1 Transfert thermique conductif

La **conduction thermique** est le mode de transfert thermique entre deux systèmes séparés par un milieu matériel immobile.

Le transfert d'énergie résulte des collisions entre les particules microscopiques (molécules ou atomes) des systèmes et celles de la paroi. Ces particules sont animées d'un mouvement d'agitation thermique. Dans la paroi l'énergie est transportée de proche en proche par les vibrations des particules qui sont liées entre elles.

Par exemple le transfert thermique à travers les murs d'une maison ou à travers le fond d'une casserole est un transfert conductif.

### 1.2 Transfert thermique convectif

La **convection thermique** met en jeu un fluide en mouvement. Le fluide passe d'un système à l'autre, reçoit de l'énergie du système chaud et cède de l'énergie au système froid.

**Convection naturelle** le mouvement du fluide est provoqué par la différence de température elle-même.

Par exemple, dans une pièce chauffée par le sol, l'air situé au niveau du sol, plus chaud donc plus léger que l'air situé au-dessus, tend à s'élever.

**Convection forcée** le mouvement du fluide est provoqué par une cause extérieure.

Par exemple les circuits intégrés d'un ordinateur sont refroidis par transfert convectif à l'aide d'un petit ventilateur.

### 1.3 Transfert thermique radiatif

Le transfert thermique radiatif ou **rayonnement thermique** a lieu entre deux systèmes de températures différentes séparés par un milieu transparent (pouvant éventuellement être le vide).

Il met en jeu les phénomènes d'**émission thermique** et d'**absorption**. Les particules microscopiques des deux systèmes, du fait de leur mouvement d'agitation thermique, émettent des ondes électromagnétiques, appartenant le plus souvent au domaine infrarouge. La puissance émise augmente très fortement avec la température du système. Les photons émis par chacun des systèmes sont reçus par l'autre qui en absorbe une partie. Il y a ainsi transfert d'énergie dans les deux sens, mais du fait que le système chaud émet plus d'énergie que le système froid, le transfert d'énergie global se fait du système chaud vers le système froid.

Par exemple lorsqu'on se chauffe au soleil ou encore devant un feu de cheminée, on reçoit un transfert thermique radiatif (dans le premier cas le transfert thermique a traversé l'espace vide entre le Soleil et la Terre).

#### Remarque

Les trois modes de transferts thermiques peuvent coexister.

#### Exemple

Le transfert thermique entre l'intérieur d'une habitation et l'extérieur est :

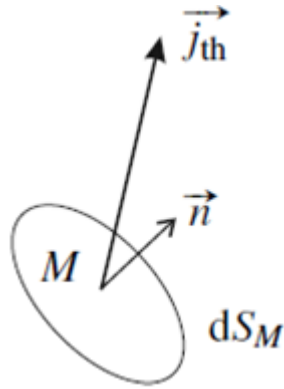
- conductif à travers un mur ou une fenêtre fermée ;
- convectif à travers une fenêtre ouverte,
- radiatif quand le rayonnement du soleil entre à travers une vitre.

## 2 Le courant thermique

Le transfert thermique par conduction est transporté par un courant d'énergie à l'intérieur de la matière appelé **courant thermique**. Il apparaît un courant thermique à travers tout matériau dont la température n'est pas uniforme. Dans cette situation on n'a pas équilibre thermodynamique, mais on fait l'hypothèse de l'**équilibre thermodynamique local**. On note  $T(M, t)$  la température en un point  $M$  quelconque du matériau à l'instant  $t$ .

### 2.1 Vecteur densité de courant thermique

Le courant thermique est décrit par un champ vectoriel  $\vec{j}(M, t)$  appelé **densité de courant thermique**.



**Figure 23.3** – Définition du vecteur densité de courant thermique.

On se place en un point  $M$  quelconque à l'intérieur du matériau et on considère une surface élémentaire  $dS_M$  autour de  $M$ . On choisit un vecteur unitaire  $\vec{n}$  orthogonal à cette surface (il y a deux possibilités). La définition du vecteur de  $\vec{j}(M, t)$  est la suivante :

La quantité d'énergie qui traverse  $dS_M$  dans le sens du vecteur  $\vec{n}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta^2 Q = \vec{j}(M, t) \vec{n} dS_M dt$$

Le vecteur  $\vec{j}(M, t)$  donne la direction dans laquelle l'énergie se déplace; sa norme indique l'importance du courant d'énergie. Par exemple,  $\delta^2 Q$  est nul si  $\vec{j}_{th}$  est tangent à la surface (perpendiculaire à  $\vec{n}$ ) : l'énergie longe la surface sans la traverser.

### Remarques

1. Le transfert thermique  $\delta^2 Q$  est algébrique : positif si l'énergie passe dans le sens du vecteur  $\vec{n}$  et négatif si elle passe dans l'autre sens.
2. La notation  $\delta^2 Q$  indique que ce transfert thermique est deux fois élémentaire parce que la surface  $dS_M$  est élémentaire et parce que la durée  $dt$  est élémentaire.

$\|\vec{j}_{th}\|$  se mesure en  $J s^{-1} \cdot m^{-2}$ , soit en  $W \cdot m^{-2}$ .

## 2.2 Flux thermique

On appelle **flux thermique** la puissance du transfert thermique. Ainsi, le flux thermique élémentaire traversant la surface  $dS_M$  dans le sens de  $\vec{n}$  est :

$$d\Phi = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_{th}(M, t) \vec{n} dS_M \quad \text{soit} \quad d\Phi = \vec{j}_{th}(M, t) \cdot \vec{dS}_M$$

Le flux thermique traversant  $S$  dans le sens de ses vecteurs surface élémentaire  $\vec{dS}_M$  est :

$$\Phi = \iint_{M \in S} \vec{j}_{th}(M, t) \cdot \vec{dS}_M$$

### 3 Loi de Fourier - Conductivité thermique

#### 3.1 Loi phénoménologique de Fourier

Le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}(M, t)$  est lié au gradient du champ de température  $T(M, t)$  dans le matériau par la **loi de Fourier** :  $\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{grad}T(M, t)$  où

$\lambda$  est une grandeur positive appelée **conductivité thermique** du matériau.

Quelle est l'unité de la conductivité thermique ?  $\lambda$  se mesure en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

#### 3.2 Remarques

1. Le signe «-» dans la loi de Fourier traduit le fait que l'énergie se déplace des régions chaudes vers les régions froides puisque, d'après les propriétés du gradient, le vecteur  $\overrightarrow{grad}T$  pointe dans la direction dans laquelle la température augmente.

Ce sens du transfert thermique est déterminé par le second principe de la thermodynamique.

2. La loi de Fourier traduit un phénomène irréversible. En effet, si on inverse le sens du temps, le vecteur  $\vec{j}_{th}(M, t)$  change de sens, mais pas le vecteur  $\overrightarrow{grad}T$  donc la loi de Fourier n'est plus vérifiée.

#### 3.2 Limites de validité de la loi de Fourier

La loi de Fourier est une *loi phénoménologique*, c'est-à-dire une relation permettant de décrire efficacement des phénomènes observés mais qui n'a pas de fondement théorique. Une loi phénoménologique ne se démontre pas.

En tant que loi phénoménologique, la loi de Fourier n'est pas valable dans tous les cas :

- Si le gradient thermique est trop fort, la relation entre le flux thermique et ce gradient cesse d'être assimilable à une loi linéaire.
- Si le gradient thermique varie trop rapidement dans le temps, la relation entre le flux thermique et ce gradient cesse d'être instantanée ; il y a un retard dans l'établissement du flux thermique.
- Il existe des milieux anisotropes dont la conductivité thermique dépend de la direction de l'espace : par exemple le graphite a une conductivité 400 fois plus forte dans une direction parallèle aux couches atomiques que perpendiculairement à celles-ci. Dans un tel milieu le flux thermique n'est plus nécessairement colinéaire au gradient de température.

#### 3.3 Ordre de grandeur des conductivités thermiques

La conductivité thermique dépend du matériau, et varie avec la température. Les métaux purs solides ont les conductivités thermiques les plus fortes, typiquement de l'ordre de  $100\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Les solides non métalliques ont des conductivités thermiques allant, en ordre de grandeur, de  $10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  à  $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Les liquides ont des conductivités thermiques de l'ordre de  $10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  à  $1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . La conductivité thermique d'un gaz est de l'ordre de  $10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Les « isolants thermiques » sont des matériaux composites. On peut mesurer une conductivité thermique effective qui est en général de l'ordre de  $10^{-2} - 10^{-1} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

	Matériau	$\lambda$ à 300 K en $\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
1	Cuivre	$4.0 \cdot 10^2$
2	Acier	$\approx 50$
3	Verre	$\approx 1$
4	Eau	$6.0 \cdot 10^{-1}$
5	Air (sous $P = 10^5 \text{ Pa}$ )	$2.6 \cdot 10^{-2}$

Quelques valeurs de conductivité thermique

## 4 Équation locale de bilan thermique

L'application du **premier principe de la thermodynamique** entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$  à un volume élémentaire d'un matériau parcouru par un courant thermique permet d'obtenir une équation locale reliant le champ de température  $T(M, t)$  et le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  dans le matériau. On établira cette équation dans trois géométries, avant d'en admettre la généralisation. On suppose que le matériau est un solide indilatable et incompressible. Il est caractérisé par trois grandeurs que l'on supposera constantes :

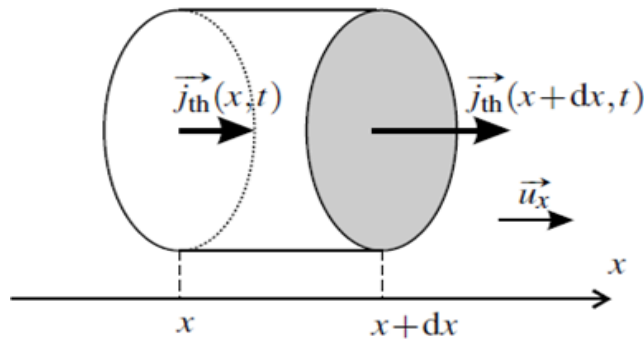
- sa masse volumique  $\mu$ ,
- sa capacité thermique massique  $c$ ,
- sa conductivité thermique  $\lambda$ .

### 4.1 Bilan thermique local à une dimension

On suppose que la température ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace,  $x$  par exemple, et du temps :  $T(M, t) = T(x, t)$ .

Alors,  $\overrightarrow{\text{grad}}T(M, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$  et, d'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant thermique est  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$  Il est de la forme :  $\vec{j}_{th} = j_{th}(x, t) \vec{u}_x$

On prend pour système  $\Sigma$  la portion de matériau contenue dans un cylindre droit dont les deux bases, de surface  $S$ , sont comprises dans les plans  $x$  et  $x + dx$ . Le volume de  $\Sigma$  est  $Sdx$  (voir figure), sa masse  $\mu Sdx$  et sa capacité thermique  $\mu c Sdx$ .



Surface de contrôle pour un bilan thermique à 1 dimension

On veut appliquer le premier principe de la thermodynamique à  $\Sigma$  entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$ . Dans le cadre d'une approximation du premier ordre en  $dx$  on peut considérer que la température dans  $\Sigma$  est uniformément égale à  $T(x, t)$ . La variation élémentaire d'énergie interne de  $\Sigma$  est alors :

$$dU^2 = \mu c S dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) = \mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt$$

en faisant un développement limité au premier ordre en  $dt$ .

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  ne reçoit aucun travail, car le matériau solide est indilatable et incompressible :

$$\delta^2 W = 0.$$

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  reçoit par conduction du transfert thermique de la part du reste du matériau. En appliquant la formule sur le transfert thermique on exprime :

- le transfert thermique à travers la face d'abscisse  $x$  :

$$\delta Q_x = \vec{j}_{th}(x, t) \cdot \vec{n}_x S dt = j_{th}(x, t) S dt$$

- le transfert thermique à travers la face d'abscisse  $x + dx$  :

$$\delta Q_{x+dx} = \vec{j}_{th}(x + dx, t) \cdot (-\vec{n}_x) S dt = -j_{th}(x + dx, t) S dt$$

Le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  traverse la base d'abscisse  $x$  (resp.  $x+dx$ ) dans le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}_x$  (resp.  $-\vec{u}_x$ )

Le transfert thermique total reçu par  $\Sigma$  est :

$$\delta^2 Q = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = (j_{th}(x, t) - j_{th}(x + dx, t)) S dt = -\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} S dx dt$$

en faisant un développement limité au premier ordre en  $dx$ .

Le premier principe pour  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$d^2U = \delta^2W + \delta^2Q \quad \text{soit} \quad \mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} S dx dt = 0 - \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} S dx dt$$

En simplifiant par  $S dx dt$  on obtient l'équation locale de bilan thermique à 1 dimension :

$$\mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

#### 4.2 Bilan thermique local en symétrie cylindrique

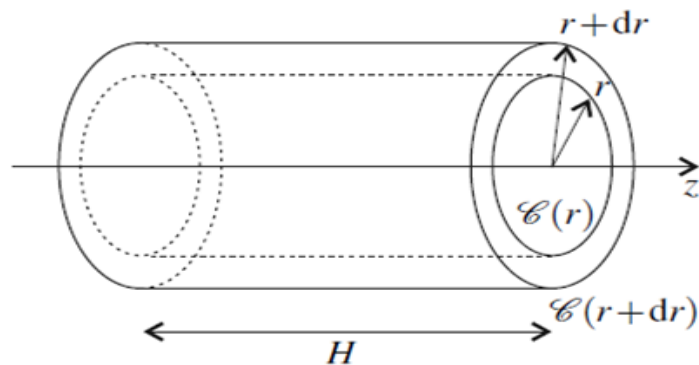
On considère maintenant le cas où la répartition de température dans le matériau est à symétrie cylindrique autour d'un axe ( $Oz$ ). On utilise les coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) autour de cet axe.

La température n'est fonction que de  $r$  et de  $t$  :  $T(M, t) = T(r, t)$ .

Alors,  $\overrightarrow{grad}T(M, t) = \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r$  et, d'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant

$$\vec{j}_{th}(M; t) = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r \quad \text{Il est de la forme} \quad \vec{j}_{th}(M; t) = j_{th}(r, t) \vec{u}_r$$

On considère comme système  $\Sigma$  la portion de matériau comprise entre les cylindres  $C(r)$  et  $C(r+dr)$  d'axe ( $Oz$ ), de rayons respectifs  $r$  et  $r + dr$  et de même hauteur  $H$ . Le volume de  $\Sigma$  est  $2\pi H r dr$ , sa masse  $\mu 2\pi H r dr$  et sa capacité thermique  $\mu c 2\pi H r dr$ .



Système  $\Sigma$  pour un bilan thermique en symétrie cylindrique.

Pour l'épaisseur de l'ordre de  $dr$  on peut considérer que la température dans  $\Sigma$  est uniformément égale à  $T(r, t)$ . La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est alors :

$$d^2U = \mu c 2\pi H r dr (T(r, t + dt) - T(r, t)) = \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} 2\pi H r dr dt \quad \text{au premier ordre en } dt.$$

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  ne reçoit pas de travail car le matériau solide est indilatable et incompressible :

$$\delta^2W = 0.$$

Pour calculer le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  on appelle  $\Phi(r, t)$  le flux thermique traversant le cylindre  $C(r)$  dans le sens du vecteur  $\vec{u}_r$ . D'après la formule du flux on a :

$$\Phi(r, t) = \iint_{M \in C(r)} (j_{th}(r, t) \vec{u}_r) \cdot (dS_M \vec{u}_r) = j_{th}(r, t) \iint_{M \in C(r)} dS_M = j_{th}(r, t) 2\pi H r$$

Le transfert thermique *reçu* par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

- à travers le cylindre  $C(r)$  :  $\delta Q_r = \Phi(r, t)dt$ ,
- à travers le cylindre  $C(r+dr)$  :  $\delta Q_{r+dr} = -\Phi(r+dr, t)dt$ ,

soit au total :

$$\begin{aligned} d^2Q &= \delta Q_r + \delta Q_{r+dr} = (\Phi(r, t) - \Phi(r+dr, t))dt \\ d^2Q &= -\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} 2\pi H dr dt \end{aligned}$$

au premier ordre en  $dr$ .

Le signe « $-$ » devant le flux  $\Phi(r+dr, t)$  est nécessaire car ce flux thermique traverse  $C(r+dr)$  vers l'extérieur du système  $\Sigma$ .

Le développement limité au premier ordre de la différence  $\Phi(r+dr, t) - \Phi(r, t)$  fait apparaître le facteur  $dr$ .

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour  $\Sigma$ , entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :

$d^2U = \delta^2W + \delta^2Q$  soit

$$\mu c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} 2\pi H r dr dt = 0 - \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} 2\pi H dr dt$$

En divisant par  $2\pi H r dr dt$ , on obtient l'équation locale de bilan thermique en symétrie cylindrique

$$\mu c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

### 4.3 Bilan thermique local en symétrie sphérique

On considère le cas où la répartition de température dans le matériau est à symétrie sphérique autour d'un point  $O$ . On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  autour de ce point. La température n'est fonction que de  $r$  et de  $t$  :  $T(M, t) = T(r, t)$ .

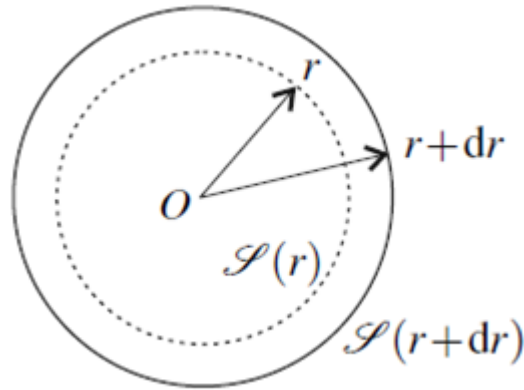
Alors,  $\overrightarrow{grad}T(M, t) = \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$  et, d'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant thermique

est :  $\vec{j}_{th}(M; t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$

Il est de la forme :  $\vec{j}_{th}(M; t) = j_{th}(r, t) \vec{u}_r$

On considère comme système  $\Sigma$  la portion de matériau comprise entre les sphères  $S(r)$  et  $S(r+dr)$  de centre  $O$ , de rayons respectifs  $r$  et  $r+dr$ . Le volume de  $\Sigma$  est  $4\pi r^2 dr$ , sa masse  $\mu 4\pi r^2 dr$  et sa capacité thermique  $\mu c 4\pi r^2 dr$ .





**Figure** – Système  $\Sigma$  pour un bilan thermique en symétrie sphérique.

Pour l'épaisseur de l'ordre de  $dr$  on peut considérer que la température dans  $\Sigma$  est uniformément égale à  $T(r, t)$ . La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est alors :

$$d^2U = \mu c 4\pi r^2 dr (T(r, t + dt) - T(r, t)) = \mu c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt \text{ au premier ordre en } dt.$$

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  ne reçoit pas de travail car le matériau solide est indilatable et incompressible :  $\delta^2W = 0$ .

Pour calculer le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  on appelle  $\Phi(r, t)$  le flux thermique traversant la sphère  $S(r)$  dans le sens du vecteur  $\vec{u}_r$ . D'après la formule du flux :

$$\Phi(r, t) = \iint_{M \in S(r)} (j_{th}(r, t) \vec{u}_r) \cdot (dS_M \vec{u}_r) = j_{th}(r, t) \iint_{M \in S(r)} dS_M = j_{th}(r, t) 4\pi r^2:$$

Le transfert thermique *reçu* par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

- à travers la sphère  $S(r)$  :  $\delta Q_r = \Phi(r, t) dt$ ,
- à travers la sphère  $S(r+dr)$  :  $\delta Q_{r+dr} = - \Phi(r+dr, t) dt$ ,

soit au total :

$$d^2Q = \delta Q_r + \delta Q_{r+dr} = (\Phi(r, t) - \Phi(r+dr, t)) dt$$

$$d^2Q = - \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} dr dt = - \frac{\partial (r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} 4\pi dr dt \text{ au premier ordre en } dr.$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour  $\Sigma$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$d^2U = \delta^2W + \delta^2Q \text{ soit } \mu c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt = 0 - \frac{\partial j_{th}(r^2, t)}{\partial r} 4\pi dr dt$$

En divisant par  $4\pi r^2 dr dt$ , on obtient l'équation locale de bilan thermique en symétrie sphérique

$$\mu c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

#### 4.4 Complément : équation locale de bilan thermique

Les équations (23.5), (23.6) et (23.7) sont les expressions dans trois cas particuliers d'une équation générale qui s'écrit :  $\mu c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th}(M,t) = 0$

Cette équation se démontre en appliquant le premier principe de la thermodynamique entre  $t$  et  $t + dt$  au système  $\Sigma$  constitué par la matière à l'intérieur d'une surface de contrôle  $S$  quelconque délimitant un volume  $V_S$ .

La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est, au premier ordre en  $dt$  :

$$dU = \iiint_{M \in V_S} (T(M, t + dt) - T(M, t)) (\mu c d\tau_M) = \left( \iiint_{M \in V_S} \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} d\tau_M \right) dt$$

$\Sigma$  ne reçoit aucun travail car le matériau solide est indilatable et indéformable. Le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta Q = \left( - \oiint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{dS}_P \right) dt$$

où le signe « - » provient du fait que la surface fermée  $S$  est, par convention, orientée vers l'extérieur.

Le premier principe s'écrit ainsi, après simplification par  $dt$  :

$$\iiint_{M \in V_S} \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} d\tau_M = - \oiint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{dS}_P$$

Le deuxième terme de la formule précédente peut se transformer par le théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{dS}_P = \iiint_{M \in V_S} \text{div} \vec{j}_{th}(M, t) d\tau_M$$

Il vient donc :

$$\iiint_{M \in V_S} \left( \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th}(M, t) \right) d\tau_M = 0$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume  $V_S$ , on a nécessairement l'équation

$$\mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th}(M, t) = 0$$

#### 5 Équation de la diffusion thermique

L'équation de diffusion thermique est une équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de température  $T(M, t)$  dans un matériau solide. Elle est à la base de la simulation informatique du comportement thermique des systèmes.

## 5.1 Diffusion thermique en l'absence de sources

### a) Équation de la diffusion thermique à une dimension

On considère dans ce paragraphe le cas où la température dans le matériau ne dépend que de la coordonnée  $x$  :  $T(M, t) = T(x, t)$ .

Dans l'équation locale de bilan thermique  $\mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = 0$

On peut introduire l'expression  $j_{th}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$  donnée par la loi de Fourier. Il vient :

$$\mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \left( \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right)$$

On appelle **diffusivité thermique** du matériau la quantité :  $a = \frac{\lambda}{\mu c}$

Le champ de température  $T(x, t)$  dans le matériau vérifie l'**équation de diffusion thermique à une dimension** :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right)$$

### b) Diffusivité thermique

$a$  se mesure en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Le tableau suivant donne la diffusivité thermique de quelques matériaux

N°	Matériau	$a$ $10^6$ en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
1	Cuivre	117
2	Acier	$\approx 10$
3	Verre	0.34
4	Eau	0.14
5	Air (sous $P = 1 \cdot 10^5$ Pa)	20

### c) Échelles de longueur et de temps associées

L'équation de diffusion qui relie une dérivée partielle par rapport au temps à une dérivée partielle par rapport à la coordonnée d'espace introduit un lien entre l'échelle de temps  $\tau$  caractéristique des variations temporelles de la température et l'échelle de longueur  $L$  caractéristique des variations spatiales.

On définit des grandeurs  $t^*$  et  $x^*$  sans dimension par :  $t^* = \frac{t}{\tau}$  et  $X^* = \frac{x}{L}$

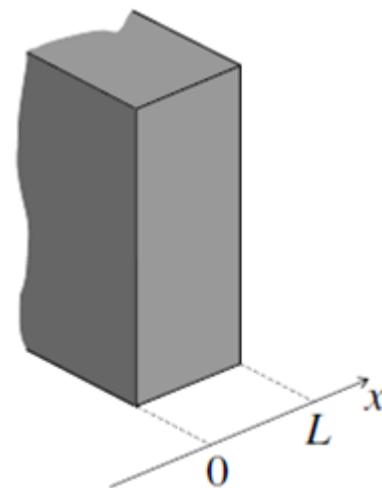
Si on remplace  $x$  et  $t$  par  $Lx^*$  et  $\tau t^*$  dans l'**équation de diffusion thermique à une dimension**), celle-ci devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t^* \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial (x^* L)^2} \right) \text{ soit } \frac{\partial T}{\partial t^*} = \frac{a \tau}{L^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial (x^*)^2} \right)$$

Les dérivées partielles intervenant dans cette équation sont du même ordre de grandeur par définition même de  $\tau$  et  $L$ . On en déduit :  $L \approx \sqrt{a \tau} \Leftrightarrow \tau \approx \frac{L^2}{a}$

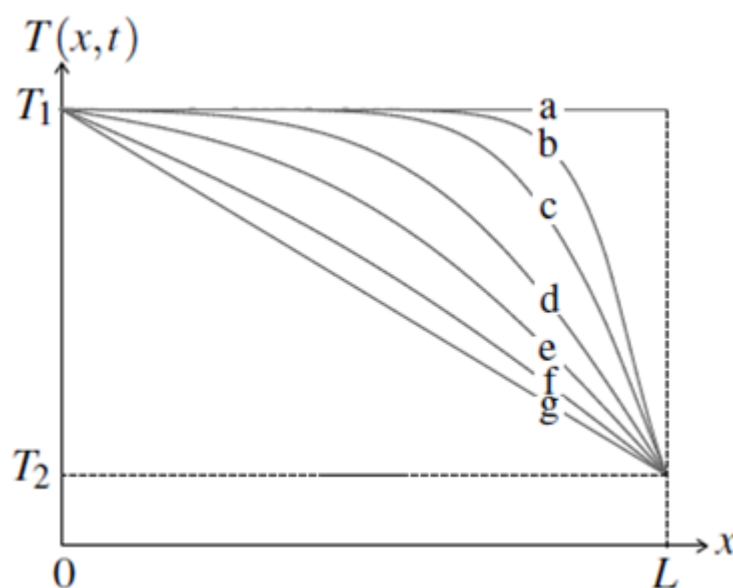
### Exemple

On considère une plaque plane perpendiculaire à l'axe  $(Ox)$ , d'épaisseur  $L$  et de dimensions très grandes devant  $L$  selon les axes  $(Oy)$  et  $(Oz)$ .



On suppose que la température dans la plaque est initialement uniformément égale à  $T_1$  et qu'à partir de  $t = 0$  on impose la température  $T_2 < T_1$  à la face  $x = L$  de la plaque tout en maintenant la face  $x = 0$  à la température  $T_1$ .

À partir de l'instant  $t = 0$  la température à l'intérieur de la plaque évolue. Ses dimensions suivant  $(Oy)$  et  $(Oz)$  étant très grandes on peut considérer que le champ de température dépend seulement de la coordonnée  $x$  :  $T(M, t) = T(x, t)$ . Il vérifie l'équation de la diffusion. La figure ci-dessous montre le résultat d'une résolution numérique de cette équation.



**Figure** – Température à l'intérieur d'une plaque d'épaisseur  $L$  à différents instants

a :  $t = 0$ , b :  $t = \frac{\tau}{100}$ , c :  $t = \frac{\tau}{50}$ , d :  $t = \frac{\tau}{20}$ , e :  $t = \frac{\tau}{10}$ , f :  $t = \frac{\tau}{5}$ , g :  $t = \tau$  et  $t \gg \tau$ ,

avec  $\tau = \frac{L^2}{a}$

La température initialement est égale à  $T_1$  en tout point (courbe a) évolue avec le temps caractéristique  $\tau = \frac{L^2}{a}$  (courbes b à g).

Pour  $t \gg \tau$  la température n'évolue plus ; le profil de température dans la plaque est alors linéaire.

#### d) Cas des symétries cylindrique et sphérique

En symétrie cylindrique : 
$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right)$$

En symétrie sphérique : 
$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right)$$

#### e) Cas d'une géométrie quelconque

Pour établir l'équation de la diffusion thermique on suit la même démarche que plus haut : on injecte l'expression du vecteur densité de courant thermique de la loi de Fourier :  $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$  dans l'équation de bilan local d'énergie et cela donne :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + div(-\lambda \overrightarrow{grad} T) = 0$$

Puisque  $div(\overrightarrow{grad}) = \Delta$ , il vient  $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t)$

L'équation de diffusion thermique permet de calculer la température  $T(M, t)$  au sein d'un matériau.

On peut procéder à une résolution :

- analytique pour des géométries très simples.
- numérique dans le cas où la géométrie est plus compliquée.

### 5.2 Diffusion thermique en présence de sources

Il existe des matériaux à l'intérieur desquels s'opère un processus dégageant (ou absorbant) de l'énergie. Par exemple :

- l'effet Joule dans un conducteur ohmique parcouru par un courant électrique,
- des réactions nucléaires dans un matériau radioactif.

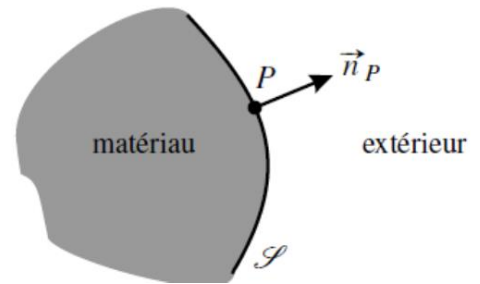
Le dégagement d'énergie est modélisé par la **puissance volumique produite**, que l'on notera  $P_V(M, t)$ . Par définition, la puissance dégagée dans un volume élémentaire  $dt_M$  autour d'un point  $M$  à l'instant  $t$  est :

$$dP_{\text{prod}} = P_V(M, t) dt_M \quad P_V \text{ est exprimée en } W \text{ m}^{-3}$$

Dans un tel matériau, l'équation de diffusion thermique devient  $\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T(M, t) + \frac{1}{\lambda} P_V(M, t)$  qui tient compte de la production d'énergie thermique.

### 5.3 Conditions aux limites pour le champ de température

Pour résoudre l'équation de diffusion thermique (avec ou sans terme source) il faut déterminer les **conditions aux limites** qui sont vérifiées en chaque point de la surface  $S$  délimitant le matériau dans lequel on calcule la température. On note  $P$  un point de cette surface et  $\vec{n}_P$  le vecteur normal à la surface en ce point dirigé vers l'extérieur du matériau.



#### a) Cas d'un contact parfait entre deux matériaux solides

Dans ce cas, il y a en  $P$  :

- continuité du champ de température :

$$(T(P, t))_{\text{solide 1}} = (T(P, t))_{\text{solide 2}},$$

- continuité de la composante normale du vecteur densité de courant thermique :

$$(\vec{j}_{th}(P, t))_{\text{solide 1}} \cdot \vec{n}_P = (\vec{j}_{th}(P, t))_{\text{solide 2}} \cdot \vec{n}_P$$

Cette condition est nécessaire car le flux thermique à travers une surface  $dS_P$  autour de  $P$  est identique, qu'on le calcule du côté du solide 1 ou du côté du solide 2 :

$$d\Phi = (\vec{j}_{th})_{\text{solide 1}} \cdot (dS_P \vec{n}_P) = (\vec{j}_{th})_{\text{solide 2}} \cdot (dS_P \vec{n}_P)$$

#### b) Cas d'un contact avec un fluide, loi de Newton

Lorsque le matériau solide est en contact en  $P$  avec un fluide de température  $T_f$ , le flux thermique élémentaire passant du solide au fluide à travers la surface  $dS_P$  est donné par la **loi de Newton** :

$$d\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T(P, t) - T_f) dS_P, \quad \text{où}$$

$h$  est une constante appelée **coefficient de transfert thermique de surface**.  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ .

Sa valeur dépend

- de la nature du fluide,
- de sa vitesse,
- de l'état de la surface solide.

$h$  augmente avec la conductivité thermique du fluide ; il est plus grand pour un liquide que pour un gaz.  $h$  est plus fort pour une convection forcée que pour une convection naturelle

Dans le cas où la loi de Newton s'applique, la condition aux limites en  $P$  exprime le fait que le flux thermique passant du solide au fluide à travers  $dS_P$  est le même qu'on le calcule du côté du solide, avec le vecteur densité de courant thermique (flux conductif), ou du côté du liquide par :

$$d\Phi = \vec{j}_{th}(P, t) \cdot (dS_p \vec{n}_p) = h(T(P, t) - T_f) dS_p$$

$$\vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_p = h(T(P, t) - T_f)$$

### Remarque

Si le coefficient  $h$  tend vers l'infini, cette condition implique que  $T(P, t) = T_f$  (car la norme du vecteur densité de courant thermique ne peut être infinie). Dans ce cas le fluide impose sa température au solide. C'est une modélisation courante.

### c) Cas où le flux thermique est imposé

Une paroi adiabatique impose que le flux thermique  $d\Phi$  à travers  $dS_p$  est nul. Dans cette modélisation :

$$\vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_p = 0$$

On peut aussi imposer un flux d'énergie de puissance surfacique connue  $j_0(t)$ . Dans ce cas :

$$\vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_p = -j_0(t) \text{ avec un signe } - \text{ si } j_0 \text{ est dirigé vers le matériau.}$$

### 5.4 Cas de température en régime stationnaire

Dans ce cas : la température et le vecteur densité de courant thermique ne dépendent pas du temps.

On les notera donc  $T(M)$  et  $\vec{j}_{th}(M)$ .

#### a) Cas où il n'y a pas de sources

En régime stationnaire le champ de températures dans un matériau dépourvu de sources de chaleur vérifie l'équation de Laplace :  $\Delta T(M) = 0$ .

L'équation de Laplace se résout aisément dans les géométries simples :

**Cas unidimensionnel** Si la température ne dépend que de  $x$  l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

1- Montrer que  $T(x) = Ax + B$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer

Le matériau s'étend entre  $x = 0$  et  $x = L$  et l'on impose les températures  $T(0) = T_1$  et  $T(L) = T_2$ .

2- Déterminer  $A$  et  $B$  et montrer que  $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$

**Cas de la symétrie cylindrique** Si la température ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ) l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

1- Montrer que  $T(r) = A \ln r + B$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer

Le matériau s'étend entre  $r = R_1$  et  $r = R_2$  et que l'on impose les températures  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ ,

2- Déterminer  $A$  et  $B$  et montrer que  $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

**Cas de la symétrie sphérique** Si la température ne dépend que de la distance  $r$  au point  $O$ , l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

1- Montrer que  $T(r) = \frac{A}{r} + B$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer

Le matériau s'étend entre  $r = R_1$  et  $r = R_2$  et que l'on impose les températures  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ ,

2- Déterminer  $A$  et  $B$  et montrer que  $T(r) = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1} - \frac{(T_2 - T_1) R_1 R_2}{(R_2 - R_1) r}$

### b) Cas où il existe des sources

En régime permanent, l'équation de la diffusion thermique avec source (23.14) s'écrit :

$$\Delta T(M) = -\frac{1}{\lambda} P_V(M)$$

Un matériau dans lequel une puissance volumique constante et uniforme  $P_V(M) = P_0$  est produite remplit la portion d'espace comprise entre les plans  $x = 0$  et  $x = L$ . La paroi  $x = 0$  est adiabatique et la paroi  $x(L)$  maintenue à la température  $T_0$ . Quelle est la température maximale dans le matériau en régime permanent ?

1- Chercher la température  $T(x)$  dans le matériau en régime permanent.

L'équation de la diffusion s'écrit :  $\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{P_0}{\lambda}$

Montrer que  $T(x) = -\frac{P_0}{2\lambda} x^2 + Ax + B$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

2- Déterminer  $A$  et  $B$  et montrer que  $T(x) = \frac{P_0}{2\lambda} (L^2 - x^2) + T_0$

En  $x = 0$ , la paroi est adiabatique ( $j_{th}(0) = 0$ ) et en  $x = L$ , la température est imposée  $T(L) = T_0$

3- Montrer que la température maximale est :  $T_{max} = T(0) = T_0 + \frac{P_0 L^2}{2\lambda}$

## 6 Résistance thermique

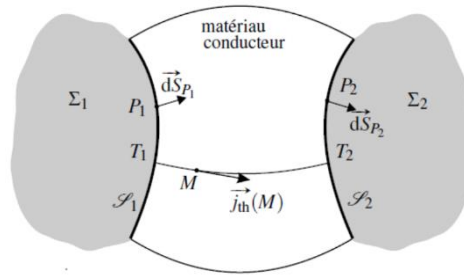
On s'intéresse au transfert thermique conductif entre un système  $\Sigma_1$  et un système  $\Sigma_2$  séparés par un matériau solide  $\Sigma$  de conductivité thermique  $\lambda$ . On se place en **régime stationnaire** et on suppose que le matériau ne contient pas de source d'énergie thermique.

### 6.1 Définition

Soit  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) la surface de contact entre  $\Sigma_1$  (resp.  $\Sigma_2$ ) et le matériau conducteur.



On oriente  $S_1$  dans le sens  $\Sigma_1 \rightarrow$  conducteur et  $S_2$  dans le sens conducteur  $\rightarrow \Sigma_2$ . On suppose la température de la surface  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) uniforme et on la note  $T_1$  (resp.  $T_2$ ).



Le flux thermique partant de  $\Sigma_1$  à travers le conducteur est :

$$\iint_{P_1 \in S_1} \vec{j}_{th}(P_1) \cdot \vec{dS}_{P_1}$$

le flux thermique arrivant à  $\Sigma_2$  à travers le conducteur est :  $\iint_{P_2 \in S_2} \vec{j}_{th}(P_2) \cdot \vec{dS}_{P_2}$   
 Si toutes les lignes de courant thermique (c'est-à-dire les lignes de champ du vecteur densité de courant thermique) partant de  $S_1$  arrivent à  $S_2$ , toute l'énergie partant de  $\Sigma_1$  arrive à  $\Sigma_2$  : ces deux flux sont donc égaux. Le flux thermique passant par conduction de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$  est alors :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in S_1} \vec{j}_{th}(P_1) \cdot \vec{dS}_{P_1} = \iint_{P_2 \in S_2} \vec{j}_{th}(P_2) \cdot \vec{dS}_{P_2}$$

Le courant thermique dans le matériau conducteur est donné par la loi de Fourier :

$\vec{j}_{th}(M) = -\lambda \overrightarrow{grad}T(M)$ . On peut alors écrire :

$$T_1 - T_2 = - \int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{grad}T(M) \cdot \vec{dl}_M = \frac{1}{\lambda} \int_{S_1}^{S_2} \vec{j}_{th}(M) \cdot \vec{dl}_M$$

où l'intégrale est calculée le long d'une ligne de courant quelconque allant de  $S_1$  à  $S_2$ . Ainsi, la différence de température  $T_2 - T_1$  est proportionnelle au courant thermique comme le flux thermique. Il en résulte que  $T_1 - T_2$  et  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  sont proportionnels entre eux : si on multiplie le courant thermique par un nombre  $\alpha$ , ils sont tous les deux multipliés par  $\alpha$ . Cette propriété permet de poser la définition suivante :

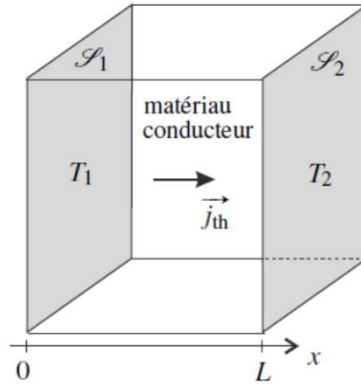
On appelle **résistance thermique**  $R_{th}$  du conducteur thermique entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , le rapport :  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{12}}$

La résistance thermique s'exprime en  $K.W^{-1}$ .

On définit aussi la **conductance thermique** :  $G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\Phi_{12}}{T_1 - T_2}$

La conductance thermique s'exprime en  $W.K^{-1}$ .

## 6.2 Résistance thermique dans le cas d'un transfert unidimensionnel



On suppose que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces planes parallèles de même aire  $S$  et séparées par une distance  $L$ . Si  $L$  est petite devant les dimensions des deux surfaces (ce qui n'est pas respecté sur la figure pour une raison de clarté), on peut négliger les effets de bord. La température dans le matériau conducteur ne dépend alors que de la coordonnée  $x$  le long d'un axe perpendiculaire à  $S_1$  et  $S_2$ .

En régime stationnaire et en l'absence de sources, la température dans le matériau est donnée par l'équation :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

On en déduit, par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th}(M) = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{u}_x$$

On calcule ensuite :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in S_1} \vec{j}_{th}(P_1) \cdot \vec{dS}_{P_1} = \left( \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{u}_x \right) \cdot (S \vec{u}_x) = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$$

On trouve ainsi l'expression de la résistance thermique  $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

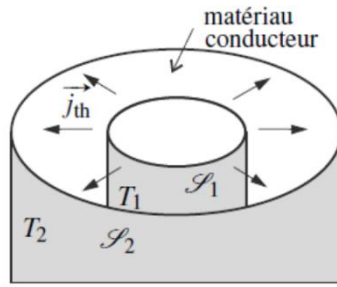
### Exemple

La résistance thermique d'une vitre d'épaisseur  $e = 5,0$  mm de surface  $S = 1,0$  m<sup>2</sup> et  $\lambda_{\text{verre}} = 0,78$  W · m<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>. vaut  $R_{th} = \frac{e}{\lambda S} = 6,4 \cdot 10^{-3}$  K · W<sup>-1</sup>

## 6.3 Résistance thermique en géométries cylindrique et sphérique

### a) Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux

On suppose que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces cylindriques de même axe ( $Oz$ ), de même hauteur  $H$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . Si  $R_2 - R_1$  est petit devant  $H$  on peut négliger les effets de bord. La température dans le matériau conducteur ne dépend alors que de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ).



En régime stationnaire et en l'absence de sources, la température dans le matériau est donnée par l'équation

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

On en déduit, par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

On calcule ensuite :

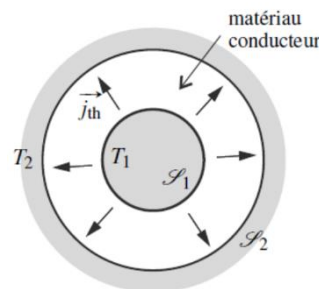
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in S_1} \vec{j}_{th}(P_1) \cdot \vec{dS}_{P_1} = \iint_{P_1 \in S_1} \left( \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{R_1} \vec{u}_r \right) \cdot (dS_{P_1} \vec{u}_r) = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{R_1} 2\pi R_1 H$$

On trouve ainsi l'expression de la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi H \lambda}$$

## b) Résistance thermique entre deux sphères concentriques

On suppose que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux sphères de même centre  $O$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . Par symétrie, la température dans le matériau conducteur ne dépend que de la distance  $r$  au point  $O$ .



En régime stationnaire et en l'absence de sources, la température dans le matériau est donnée par l'équation :

$$T(r) = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1} - \frac{(T_2 - T_1) R_1 R_2}{(R_2 - R_1) r}$$

On en déduit, par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th}(M) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = \lambda \frac{(T_1 - T_2) R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

On calcule ensuite :

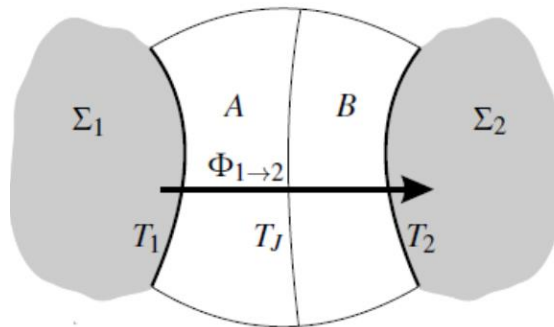
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in S_1} \vec{j}_{th}(P_1) \cdot \vec{dS}_{P_1} = \iint_{P_1 \in S_1} \lambda \frac{(T_1 - T_2)R_2}{(R_2 - R_1)R_1} \vec{u}_r \cdot (dS_{P_1} \vec{u}_r) = \lambda \frac{(T_1 - T_2)R_2}{(R_2 - R_1)R_1} 4\pi R_1^2$$

On trouve ainsi l'expression de la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_2 R_1}$$

## 6.4 Lois d'association des résistances thermiques

Les conducteurs thermiques différents  $A$  et  $B$  séparent les systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .



### a) Association de résistances thermiques en série

Les conducteurs thermiques  $A$  et  $B$  sont en **association série** quand :

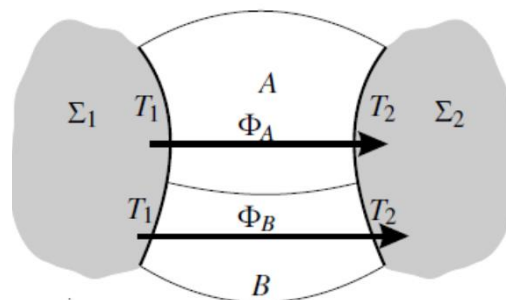
- le flux thermique  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  traverse le conducteur  $A$  puis le conducteur  $B$ ,
- la surface de jonction des conducteurs est isotherme.

Les résistances thermiques s'ajoutent quand elles sont en série.

### b) Association de résistances thermiques en parallèle

Les conducteurs thermiques  $A$  et  $B$  sont en **association parallèle** quand les lignes de courant thermique partant de  $S_1$  traversent l'un ou l'autre des deux conducteurs.

Le flux thermique passant de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$  est dans ce cas :  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_A + \Phi_B$ , où  $\Phi_A$  (resp.  $\Phi_B$ ) est le flux traversant le conducteur  $A$  (resp.  $B$ ).



Les conductances thermiques associées en parallèle s'ajoutent.

### 6.5 Analogie électrique.

Un conducteur de conductivité électrique  $\sigma$ , soumis à une ddp est le siège d'un courant électrique dont le vecteur densité de courante électrique  $\vec{j}$  est relié au champ électrique par  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

D'après la loi d'ohm locale  $\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\overrightarrow{\text{grad}}V$

L'intensité du courant qui traverse le conducteur est le flux du vecteur  $\vec{j}$  à travers la section du conducteur. On a le tableau d'analogie suivant :

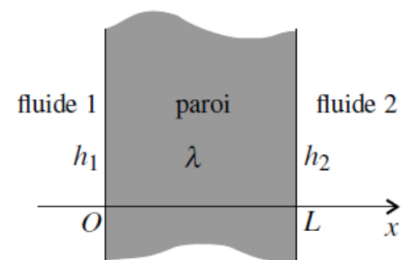
Loi d'Ohm	Loi de Fourier
$\vec{j}$ : densité de courant électrique	$\vec{j}_{th}$ : densité de flux thermique
$V$ : potentiel	$T$ : Température
$\sigma$ : conductivité électrique	$\lambda$ : coefficient de diffusion thermique
$\vec{j} = -\sigma\overrightarrow{\text{grad}}V$	$\vec{j}_{th} = -K\overrightarrow{\text{grad}}T$

On pourra définir une résistance thermique  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

### 6.5 Résistance thermique d'une interface solide-fluide

#### Exemple

Une paroi plane de surface  $S$ , d'épaisseur  $L$  et de conductivité thermique  $\lambda$  sépare deux fluides de températures  $T_1$  et  $T_2$ . Les coefficients de transferts au niveau des deux parois sont  $h_1$  et  $h_2$ . Quel est le flux thermique passant d'un liquide à l'autre ?



En régime stationnaire, la température à l'intérieur de la paroi (matériau sans sources d'énergie thermique) est de la forme :  $T(x) = Ax + B$ . Les conditions aux limites sont :

$$j_{th}(0) = h_1(T_1 - T(0)) \text{ et } j_{th}(L) = h_2(T(L) - T_2)$$

Sachant que :  $j_{th}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda A$  on réécrit ces conditions :

$$-\lambda A = h_1(T_1 - B) \text{ et } -\lambda A = h_2(AL + B - T_2).$$

On tire

$$A = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{\lambda}{h_1} + L + \frac{\lambda}{h_2}}$$

On peut maintenant exprimer le flux thermique traversant la plaque :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{th}(0)S = -\lambda AS = (T_1 - T_2) \frac{1}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}}$$

Ainsi, la résistance thermique entre les deux fluides est :

$$R_{th} = \frac{(T_1 - T_2)}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}$$

D'une manière générale :

Une interface solide-fluide de surface  $S$  a pour résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{1}{hS}$$

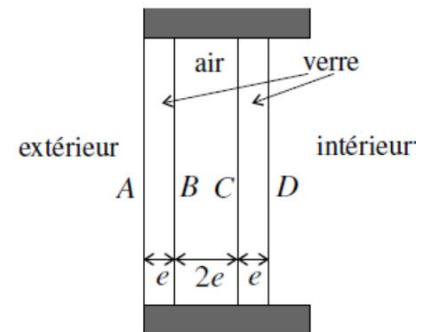
où  $h$  est le coefficient de transfert thermique de surface de la loi de Newton.

## Exercice

### Double vitrage (\*)

1. Une fenêtre simple vitrage est constituée d'une plaque de verre de surface  $S$  et d'épaisseur  $e$ . La conductivité thermique du verre est  $\lambda_v = 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Les pertes dues au cadre de la fenêtre sont négligées.

Exprimer la puissance thermique perdue à travers la fenêtre,  $P_f$ , en fonction de  $\lambda_v$ ,  $e$ ,  $S$ ,  $T_i$  température à l'intérieur de la maison et  $T_e$  température à l'extérieur.



2. Un fenêtre double vitrage est composée de deux vitres identiques d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$ , séparées par une épaisseur  $2e$  d'air (voir figure). La conductivité thermique de l'air est

$$\lambda_a = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On appelle  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les quatre surfaces indiquées sur la figure. Les températures des surfaces  $A$  et  $D$  sont  $T(A) = T_e$  et  $T(D) = T_i$ .

a. Exprimer les résistances thermiques  $R_{th,AB}$ ,  $R_{th,BC}$  et  $R_{th,CD}$  en fonction de  $e$ ,  $\lambda_v$ ,  $\lambda_a$  et  $S$ .

b. Exprimer la résistance thermique totale  $R_{th,AD}$ .

c. Montrer que la puissance thermique perdue à travers la fenêtre double vitrage  $P'_f$  est telle que  $\frac{P'_f}{P_f} =$

$$\frac{\lambda_a}{2\lambda_v} \text{ Conclure.}$$

### Le paradoxe de l'isolant (\*)

Un tuyau d'eau chaude est entouré par une gaine isolante de conductivité thermique  $\lambda$ , de rayon intérieur  $r_1$  (égal au rayon extérieur du tuyau) et de rayon extérieur  $r_2$ . La gaine est en contact avec l'air ambiant avec lequel elle a un échange thermique suivant la loi de Newton, avec un coefficient d'échange  $h$ .

1. Pour une longueur  $l$  de tuyau exprimer les résistances thermiques et de la gaine isolante et de l'interface gaine isolante/air.

2. Étudier les variations de la résistance thermique équivalente avec  $r_2$ . Quel résultat paradoxal trouve-t-on ?